Aufgabenkatalog Analysis – Sommersemester 2019
Aufgaben zum Thema **Reihen**
Dr. Anton Malevich, Leonard Bechtel, Julian Maas

Aufgabe 1 (2) *Cauchy Konvergenzkriterium*
Bekannterweise konvergiert eine Folge reeller Zahlen $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots} \subset \mathbb{R}$ per Definition genau dann, wenn die Differenz zweier beliebiger Folgenglieder ab einem bestimmten Index kleiner als jeder vorgelegte (positive) Wert wird, also

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \ |a_n - a_m| < \varepsilon \qquad \forall n, m \geq N$$

Eine Reihe reeller Summanden $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$, $a_k \in \mathbb{R} \ \forall k \in \mathbb{N}$, konvergiert nach dem Cauchykriterium wiederum genau dann, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| < \varepsilon \qquad \forall n > m \geq N.$$

Erläutern Sie den Zusammenhang beider Konvergenzbegriffe in eigenen Worten und versuchen Sie das Cauchykriterium als (möglichst einfachen) deutschen Satz zu formulieren.

Aufgabe 2 (3) *Konvergenz der geometrischen Reihe*
Sei $z \in \mathbb{C}$ beliebig.
Beweisen Sie, dass die sog. geometrische Reihe:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c \cdot z^k \qquad c \in \mathbb{R}$$

genau dann konvergiert, wenn $|z| < 1$ oder $c = 0$. Wie lautet ihr Grenzwert?
Tipp: Für die Konvergenz überlegen Sie sich zuerst eine geschlossene Formel für die Partialsummen der Reihe.

Aufgabe 3 (1) *Geometrische Reihen*
Berechnen Sie den Wert der folgenden Reihen:

a) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k}$

b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{3^k}$

c) $\sum\limits_{k=4}^{\infty} \frac{1}{3^{k-2}}$

d) $\sum\limits_{k=m}^{\infty} q^k \qquad q \in (-1, 1)$ und $m \in \mathbb{N}$

e) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(i+1)^k}$

f) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \left(\frac{3+4i}{6} \right)^k$

Aufgabe 4 (3) *Verwandte Reihen zur geom. Reihe*
Zeigen Sie für alle $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$ die Gleichung

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) q^k = \frac{1}{(1-q)^2}$$

Aufgabe 5 (1) *Verwandte geometrische Reihen*
Berechnen Sie den Wert der folgenden Reihen:

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{2^k}$ b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$ c) $\sum_{k=1}^{\infty} kq^k$

Aufgabe 6 (1) *Dezimaldarstellung reeller Zahlen*
Bekannterweise kann man jede reelle Zahl $x \in [0, 10]$ zwischen 0 und 10 als (endlosen) Dezimalbruch

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k} \qquad a_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$$

schreiben. Rechtfertigen Sie diese Behauptung, indem Sie die Konvergenz der hier abgebildeten Reihe nachweisen.

Aufgabe 7 (2) *Turmbau zu Babel*
Der Turm von Babylon werde durch Aufeinanderstapeln von Würfeln W_n der Kantenlänge $\frac{1}{n}$ Meter nachgebaut, wobei $n = 1, 2, 3, \dots$ ist. Die Bodenfläche des $(n+1)$-ten Würfels werde dabei auf die Mitte der Dachfläche des n-ten Würfels gesetz.

a) Wie hoch wird der Turm?

b) Kann der Turm mit endlich viel Farbe angestrichen werden?

c) Kommen die Baumeister mit endlich viel Beton aus, wenn jeder Würfel ganz aus Beton besteht?

Aufgabe 8 (3) *Notwendiges Kriterium für die Konvergenz von Reihen*
Sei $\{a_n\}_{n=1,2,\dots} \subset \mathbb{R}$ eine Folge reeller Zahlen.
Überlegen Sie sich, in welchem logischen Zusammenhang (Implikation, Äquivalenz) die beiden folgenden Aussagen stehen und beweisen Sie ihre Vermutung:

i) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

ii) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent.

Aufgabe 9 (3) *Majorantenkriterium*
Beweisen folgenden Satz zur Konvergenz von majorisierten Reihen (sog. Majorantenkriterium):
Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe.
Wenn es eine konvergente Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k < \infty$$

mit $a_k \leq b_k$ (bzw. $|a_k| \leq b_k$) für alle $k \in \mathbb{N}$ gibt, dann konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ (absolut).
Reicht es auch aus, wenn es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_k| \leq b_k$ für alle $k \geq N$ gibt?

Aufgabe 10 (2) *Majorantenkriterium*
Beweisen Sie mit Hilfe des Majorantenkriteriums, dass die folgenden Reihen konvergieren:

i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$

ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{2k^3+k^2+2k+1}$

iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3k^4+k^3+7k^2-k-1}$

iv) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ mit $\alpha > 1$

Aufgabe 11 (3) *Minorantenkriterium*
Beweisen Sie das Minorantenkriterium:
Falls die beiden Folgen $\{a_n\}_{n=1,2,\ldots} \subset \mathbb{R}, \{b_n\}_{n=1,2,\ldots} \subset \mathbb{R}$ der Bedingung

$$0 \leq b_n \leq a_n \qquad \text{für alle } n = 1, 2, \cdots$$

genügen und zusätzlich die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_n$ divergiert, so divergiert auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$.
Weisen Sie nun mit diesem Kriterium nach, dass die folgenden Reihen divergieren:

i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3k-1}$

iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k}{k+1}$

iv) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+2k}{5k^2+3k+7}$

v) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$

vi) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(-k + \sqrt{k^2+1}\right)$

Aufgabe 12 (2) *Teleskopreihen I*

i) Bestimmen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

indem Sie zunächst eine explizite Formel für die Partialsummen finden und dann den Grenzwert bilden.

ii) Folgern Sie, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergiert.

Aufgabe 13 (2) *Teleskopreihen II*
Untersuchen Sie folgende Reihen auf ihre Konvergenz und geben Sie ggf. ihre Werte an:

i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$

ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+3k+2}$

iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \left((k+1)^{k+1} - k^k\right)$

Aufgabe 14 (2) *Leibnizkriterium*
Untersuchen Sie folgende alternierende Reihen auf Konvergenz:

i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$

ii) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k(2k+1)}{k^2-1}$

iii) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \sin(\frac{1}{k})$

iv) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cos(\frac{1}{k})$

v) $\sum_{k=1}^{\infty} \left((-1)^k(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})\right)$

vi) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt[k]{k}}$

Sind die konvergenten Reihen auch absolut konvergent?

Aufgabe 15 (3) *Bedingungen Leibnizkriterium*
Im 19. Jahrhundert wies der belgische Mathematiker E. C. Catalan anhand des folgenden Beispiels

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}\pm\cdots$$

darauf hin, dass für das Leibnizsche Konvergenzkriterium für Reihen die Monotonievoraussetzung wesentlich ist. Diskutieren Sie Catalans Beispiel.

Aufgabe 16 (2) *Quotienten-/Wurzelkriterium*
Untersuchen Sie folgende Reihen mittels eines geeigneten Konvergenzkriteriums auf Konvergenz:

i) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{3^{2k}}$ iii) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k+1)!}{(3k)!}$ v) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3k^k}{5^k k!}$ vii) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5^{3n}}{(n^2+2)!}$

ii) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{k}\right)^{k^2}$ iv) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k}$ vi) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{8^k}$ viii) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\binom{k}{2}}{k^2}$

Aufgabe 17 (1) *Reelle Konvergenzradien*
Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden reellen Potenzreihen:

i) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+2}{2^k}x^k$ iii) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^{k+2}}{2^k}x^k$

ii) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2+x)^{2k}}{(2+\frac{1}{k})^k}$ iv) $-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}(x-1)^k$

Aufgabe 18 (2) *Reelle Potenzreihen*
Bestimmen Sie alle $x\in\mathbb{R}$, für die die folgenden reellen Potenzreihen konvergieren:

i) $\sum_{k=0}^{\infty}x^k$ ii) $\sum_{k=0}^{\infty}x^{2k}$ iii) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}$ iv) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k^2}$

Aufgabe 19 (2) *Komplexe Konvergenzradien*
Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden komplexen Potenzreihen:

i) $\sum_{k=0}^{\infty}k^m m^k z^k$ mit $m\in\mathbb{N}$

ii) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k^2}z^k$

iii) $z+4z^2+27z^3+256z^4+3125z^5+\dots$

iv) $1+\frac{2}{1}z+\frac{4}{2}z^2+\frac{8}{6}z^3+\frac{16}{24}z^4+\frac{32}{120}z^5+\dots$

Aufgabe 20 (2) *Komplexe Potenzreihen*
Bestimmen Sie alle $z\in\mathbb{C}$, für die die folgenden reellen Potenzreihen konvergieren:

i) $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{2(k!)}$ ii) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(z-1)^{2k}}{(1+\frac{1}{k})^k}$ iii) $\sum_{k=1}^{\infty}k^k(z+2)^k$

Aufgabe 21 (2) *Potenzreihe mit Konvergenzradius gleich Null*
Finden Sie eine komplexe Potenzreihe, welche den Konvergenzradius R = 0 besitzt, d.h. die nur in z = 0 konvergiert.

Aufgabe 22 (4) *Cauchyprodukt reeller Potenzreihen*
Gegeben seien die reellen Potenzreihen:

$$P_1(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^k} \quad \text{und} \quad P_2(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(-1)^k}{2^k} x^k \quad \text{für } x \in \mathbb{R}.$$

i) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren P_1 und P_2? Liegt absolute Konvergenz vor?

ii) Bestimmen Sie das Cauchyprodukt $P_1 \cdot P_2$. Geben Sie insbesondere die ersten fünf Koeffizienten der Produktreihe an.

iii) Geben Sie ein Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$ an, sodass für alle $x \in (a, b)$ das Cauchyprodukt absolut konvergiert.